I. Exemples et résultats généraux

1. **Un premier exemple**

   (a) l'équation différentielle en question est : $(\mathcal{E}_{f_1})\ :\ y' - y = -e^x$, dont la solution s'écrit $y = y_H + y_0$ où y_H solution générale de l'équation homogène : $(\mathcal{EH})\ :\ y' - y = 0$ et y_0 solution particulière de $(\mathcal{E}_{f_1})$. On a $y_H(x) = \lambda e^x$ et à l'aide de la méthode de la variation de la constante, on pose $y_0(x) = \lambda(x)e^x$, on injecte cette solution dans l'équation et on trouve $\lambda'(x) = -1$, d'où $y_0(x) = -xe^x$. Donc $y(x) = (-x+\lambda)e^x$. Cette équation ne possède aucune solution bornée au voisinage de $+\infty$.

   (b) i. De même on a : l'équation différentielle en question est : $(\mathcal{E}_{f_\alpha})\ :\ y' - y = -e^{\alpha x}$, dont la solution s'écrit $y = y_H + y_0$ où y_H solution générale de l'équation homogène : $(\mathcal{EH}) : y' - y = 0$ et y_0 solution particulière de $(\mathcal{E}_{f_\alpha})$. On a $y_H(x) = \lambda e^x$ et à l'aide de la méthode de la variation de la constante, on pose $y_0(x) = \lambda(x)e^x$, on injecte cette solution dans l'équation et on trouve $\lambda'(x)e^x = -e^{\alpha x}$, d'où $y_0(x) = -\frac{1}{\alpha-1}e^{\alpha x}$. Donc $y(x) = -\frac{1}{\alpha-1}e^{\alpha x} + \lambda e^x$.

   ii. Donc une condition nécessaire et suffisante sur α pour que cette équation admet des solutions bornées au voisinage de $+\infty$ est que $\alpha < 0$, en prenant $\lambda = 0$ mais cette solution n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

2. **Résultats généraux**

   (a) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ est un espace affine de dimension 1.

   (b) Soit y une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$, donc $(y(x)e^{-x})' = (y'(x) - y(x))e^{-x} = -f(x)e^{-x}$, d'où $y(x)e^{-x} = \lambda - \int_0^x e^{-t}f(t)\ dt$ et donc $y = y_\lambda\ :\ x \longmapsto e^x\Big(\lambda - \int_0^x e^{-t}f(t)\ dt\Big), \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

   (c) Si on suppose que la solution y_λ est bornée au voisinage de $+\infty$, alors $\lambda - \int_0^x e^{-t}f(t)\ dt = y_\lambda(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt$ est convergente et vaut λ.

   (d) L'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ peut avoir au maximum une solution bornée au voisinage de $+\infty$, en prenant $\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt$, à condition que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt$ soit convergente.

   (e) i. Pour tout réel x, on a : $Y_f(x) = e^x\Big(\lambda_f - \displaystyle\int_0^x e^{-t}f(t)\ dt\Big) = e^x\Big(\int_x^0 e^{-t}f(t)\ dt + \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt\Big) = e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt$.

   ii. La solution Y_f n'est pas nécessairement bornée au voisinage de $+\infty$ si on prend par exemple $f(t) = e^{\frac{t}{2}}$, dans ce cas $Y_f(x) = 2e^{\frac{x}{2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

(f) i. Si f est bornée par une constante M, alors $|\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt| \leqslant \int_x^{+\infty} e^{-t}|f(t)|\,dt \leqslant M\int_x^{+\infty} e^{-t}dt = Me^{-x}$, donc l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt$ est bien définie donc $Y_f(x) = e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt$ est bien définie et bornée aussi par M, comme l'équation admet au maximum une solution bornée alors c'est l'unique solution bornée, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$.

ii. Si f tend vers 0 en $+\infty$, alors $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists A > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} : x > A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$. Ainsi $\forall x > A$ on a : $|f(t| < \varepsilon$. $\forall t \geq x$ donc $|Y_f(x)| = |e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt| \leq e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}|f(t)\,|dt \leq \varepsilon e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}dt = \varepsilon$, d'où Y_f possède aussi une limite nulle en $+\infty$.

iii. Si maintenant f tend vers 0 en $-\infty$, alors $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists A < 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} : x < A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$. Ainsi $\forall x < A$ on a : $|f(t| < \varepsilon$. $\forall x \leq t \leq A$, donc $|Y_f(x)| = |e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt| \leq e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}|f(t)\,|dt = e^x\int_x^{A} e^{-t}|f(t)\,|dt + e^x\int_A^{+\infty} e^{-t}|f(t)\,|dt$, or $e^x\int_A^{+\infty} e^{-t}|f(t)\,|dt \to 0$ quand $x \to -\infty$, car $\int_A^{+\infty} e^{-t}|f(t)\,|dt$ est une constante qui ne dépond pas x et $e^x\int_x^{A} e^{-t}|f(t)\,|dt \leq e^x\int_x^{A} e^{-t}\varepsilon dt = \varepsilon e^x(e^{-x}-e^{-A}) = \varepsilon(1-e^{x-A}) \leq \varepsilon$, et donc Y_f possède une limite nulle en $-\infty$.

3. **Un autre exemple**

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}|u_{n,p}(x)| = \frac{1}{(2p+1)!}\sum_{n\geq 0}\frac{((2p+2)x)^n}{n!} = \frac{e^{(2p+2)x}}{(2p+1)!}$ finie $\displaystyle\sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq 0}|u_{n,p}(x)| = \sum_{p\geq 0}\frac{e^{(2p+2)x}}{(2p+1)!} = e^x\sum_{p\geq 0}\frac{(e^x)^{2p+1}}{(2p+1)!} = e^x sh(x)$ aussi finie et donc, pour tout réel x, la suite double $\big(u_{n,p}(x)\big)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

(b) Le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n\frac{x^n}{n!}$, est alors infinie et sa somme est $\sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq 0} u_{n,p}(x) = \sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq 0}(-1)^p\frac{(2p+2)^n}{(2p+1)!}\frac{x^n}{n!} = \sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\sum_{n\geq 0}\frac{((2p+2)x)^n}{n!} = \sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}e^{(2p+2)x} = e^x\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p(e^x)^{2p+1}}{(2p+1)!} = e^x\sin(e^x)$.

(c) l'intégrale $\displaystyle\int_0^A e^{-t}u(t)\,dt = \int_0^A \sin(e^t)dt = \int_1^{B=e^A}\frac{\sin(x)}{x}dx$ est alors une intégrale classique convergente car de même nature que la série alternée $\sum\frac{(-1)^k}{k}$. On a effectué le changement de variable $x = e^t$.

(d) Pour tout réel x, on a : $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}u(t)\,dt = \int_{e^x}^{+\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta$ en effectuant le changement de variable $\theta = e^t$.

(e) $Y_u(x) = e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}u(t)\,dt$ est déja bornée en $+\infty$ car $\displaystyle\int_0^A e^{-t}u(t)\,dt$ converge, il reste donc à l'étudier en $-\infty$. faisons une intégration par partie dans l'intégrale $|\int_{e^x}^{+\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta| = |\left[-\frac{\cos\theta}{\theta}\right]_{e^x}^{+\infty} + \int_{e^x}^{+\infty}\frac{\cos\theta}{\theta^2}\,d\theta| = |\frac{\cos e^x}{e^x} + \int_{e^x}^{+\infty}\frac{\cos\theta}{\theta^2}\,d\theta| \leq \frac{1}{e^x} + \int_{e^x}^{+\infty}\frac{1}{\theta^2}\,d\theta = \frac{2}{e^x}$, d'où $|Y_u(x)| = |e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}u(t)\,dt| = |e^x\int_{e^x}^{+\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}\,d\theta| \leq 2$ donc la solution Y_u de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_u)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

II. Cas d'une fonction intégrable

A- Cas où f est intégrable sur $\mathbb{R}$

1. La fonction G est continue, car primitive, bornée et tend vers 0 en $-\infty$ car f intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. f est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc sa limite en $+\infty$ ne peut qu'être finie et donc f ne peut qu'être bornée par une constante M, d'où $\forall A \geq x$, on a : $\int_x^A e^{-t}|f(t)dt| \leq Me^{-x}$. Donc, pour tout réel x, la fonction $t \longmapsto e^{-t}f(t)$ est intégrable sur $[x, +\infty[$.
3. Et dans ce cas : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $|Y_f(x)| = |e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt| \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}|f(t)|\ dt \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-x}|f(t)|\ dt = \int_x^{+\infty} |f(t)|\ dt$, donc Y_f est bornée sur $\mathbb{R}$ par $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\ dt$ et tend vers 0 en $+\infty$ car $\int_x^{+\infty} |f(t)|\ dt$ tend vers 0 en $+\infty$.
4. D'autre part $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad Y_f(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}G'(t)\ dt = e^x \left[e^{-t}G(t)\ \right]_x^{t\to+\infty} + e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}G(t)\ dt = -G(x) + Y_G(x)$
car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}G(t) = 0$, puisque G est bornée et donc Y_f tend vers 0 en $-\infty$ car G et Y_G tendent vers 0 en $-\infty$.
5. On a f intégrable $\mathbb{R} \Rightarrow |\ f|$ intégrable $\mathbb{R}$, donc de façon pareille on montre que la solution $Y_{|f|}$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{|f|})$ est bornée et tend vers 0 en $\pm\infty$.
6. On a : $Y_{|f|}(t) = Y'_{|f|}(t) + |f(t)|$, or $Y'_{|f|}$ intégrable car Y_f tend vers 0 en $\pm\infty$ et $|f|$ intégrable donc $Y_{|f|}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ et par suite Y_f est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque $|Y_f| \leq Y_{|f|}$.
7. Effectuons une intégration par parties, donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} Y_f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt = \left[e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt\right]_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^x e^{-x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$, car $\lim_{x\to-\infty} e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt = 0$, puisque la la fonction $t \longmapsto e^{-t}f(t)$ est intégrable et $|e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt| \leq \int_x^{+\infty} |f(t)|\ dt \to 0$ quand $x \to +\infty$
8. $\forall (f, g) \in E^2$, $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\Phi(f + \lambda g)(x) = Y_{f+\lambda g}(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t}(f(t) + \lambda g(t))\ dt = \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt + \lambda \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt = Y_f(x) + \lambda Y_g(x) = \Phi(f)(x) + \lambda\Phi(g)(x)$, d'où
$\Phi(f + \lambda g) = \Phi(f) + \lambda\Phi(g)$ et par suite Φ est linéaire, de plus d'aprés les questions précédentes si g est une fonction réelle continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $Y_g = \Phi(g)$ l'est aussi, donc $\Phi : g \longmapsto Y_g$ est un endomorphisme de E, d'autre part :
$N_1(Y_g) = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y_g(t)|\ dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} Y_{|g(t)|}\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\ dt = N_1(g)$, d'où Φ est continue avec $\|\Phi\| = \sup\limits_{g\neq0} \dfrac{N_1(\Phi(g))}{N_1(g)} \leq 1$, de plus, pour $g \geq 0$ on a : $Y_g \geq 0$, d'où $N_1(Y_g) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y_g(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ dt$, d'où $\|\Phi\| \geq 1$ et donc $\|\Phi\| = 1$.

B- Cas où l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ converge

1. La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une primitive, et en plus admet une limite nulle en $+\infty$ par construction de F et une limite finie en $-\infty$ car l'intégrale converge, donc bornée et tend vers 0 en $+\infty$.
2. Même raisonnement que celui de la question II.A.4) En déduire que la solution Y_f de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ est bornée et tend vers 0 en $+\infty$.
3. Ainsi on a : $Y_f = F - Y_F$, or F bornée et tend vers 0 en $-\infty$, donc Y_F aussi et donc Y_f vérifie la même chose.
4. Même raisonnement que celui de la question II.A.7).

III. CAS D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE

1. f est 2π–périodique continue, donc bornée sur $\mathbb{R}$, d'où Y_f aussi, or l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède au maximum une solution bornée qui est donc la fonction Y_f.
2. On effectue le changement de variable $u = t - 2\pi$ donc $y_F(x + 2\pi) = e^{x+2\pi} \displaystyle\int_{x+2\pi}^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt = e^{x+2\pi} \int_x^{+\infty} e^{-t-2\pi}f(t - 2\pi)\ dt = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\ dt = Y_f(x)$, donc Y_f est 2π–périodique et de classe $\mathcal{C}^1$, comme produit de deux fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Les coefficients de FOURIER complexes de Y_f sont donnés par la formule :
$\forall k \in \mathbb{Z} : \quad c_k(Y_f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} Y_f(x)e^{-ikx}\,dx = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{(1-ik)x}\left(\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt\right)dx =$
$\dfrac{1}{2\pi}\left(\left[\dfrac{e^{(1-ik)t}}{1-ik}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt\right]_0^{2\pi} + \displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{e^{(1-ik)x}}{1-ik}e^{-x}f(x)\,dt\right) =$
$\dfrac{1}{2\pi(1-ik)}\left(e^{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi}^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt\right) + \dfrac{c_k(f)}{1-ik} = \dfrac{c_k(f)}{1-ik}$ car
$e^{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi}^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt$ en effectuant le changement de variable $u = t - 2\pi$ et utilisant le fait que f est 2π–périodique. D'où $\forall k \in \mathbb{Z} : \quad c_k(Y_f) = \dfrac{c_k(f)}{1-ik}$.

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $c_k(f_n) = \dfrac{c_k(f_1)}{(1-ik)^{n-1}}$.
   (b) Parceque Y_f de calsse C^1 bornée.
   (c) $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big(|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|\Big) = M\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|}{M}\right)$ est finie car c'est la série de FOURRIER de f_1 en x_0 où $M = |f_1(x_0)| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_1(x)|$.
   (d) D'aprés le théorème de DIRICHLET, on a : $n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x) - c_0(f_n)| = |\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} c_k(f_n)e^{ikx}| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|c_k(f_n| = \sum_{k\in\mathbb{N}^*}|c_{-k}(f_n)|+|c_k(f_n)| = \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{|c_{-k}(f_n)|}{|1+ik|^{n-1}}+\frac{|c_{-k}(f_n)|}{|1-ik|^{n-1}} \leq$
   $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|\Big)$ car $|1+ik| = \sqrt{1+k^2} \geq 2$ et $|1-ik| = \sqrt{1+k^2} \geq 2$.
   de plus $c_0(f_n) = c_0(f)$ d'où le résultat.
   (e) Le mode de convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le même que celui de la suite géometrique $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

FIN DE L'ÉPREUVE